

## ANALIZA WPLYWU METODY SZACOWANIA ZMIENNOŚCI HISTORYCZNEJ NA PRZEWIDYWANE CENY ZBÓŻ W MODELU DWUMIANOWYM

*Monika Krawiec*

Katedra Ekonometrii i Statystyki Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie  
Kierownik: prof. dr hab. Zbigniew Binderman

Słowa kluczowe: zmienność historyczna, drzewo dwumianowe, przewidywane ceny zbóż  
*Key words: historical volatility, binomial tree, predicted grain prices*

S y n o p s i s. Zmienność jest podstawowym parametrem, wykorzystywanym przy szacowaniu wartości narażonej na ryzyko, optymalizacji portfela i wycenie opcji. Istnieje wiele metod wyznaczania zmienności. Do najpopularniejszych należą odchylenie standardowe, procedura EWMA i modele GARCH (p, q). Obliczenia wykonywane każdą z wymienionych metod mogą dawać odmienne wyniki. Celem artykułu jest ocena wpływu zmienności, w zależności od przyjętej metody szacowania, na przewidywane ceny zbóż otrzymywane w modelu dwumianowym. Badaniem objęto ceny zbóż w Polsce w okresie od 27.12.2004 do 25.04.2010 roku.

### WSTĘP

W ostatnich latach notowano zwiększone zainteresowanie inwestycjami na rynkach towarowych. Za podstawowe segmenty rynku towarowego należy uznać rynki produktów rolnych, metali i energii. Mimo że współcześnie rośnie znaczenie sektora energetycznego, to wciąż istotne znaczenie ma rynek towarów rolnych. Znajduje to odbicie w konstrukcji najważniejszych indeksów towarowych. W portfelach takich indeksów, jak Reuters Jefferies CRB Index lub Dow Jones – AIG Commodity Index dominują towary rolne. Ich udział wynosi około 50%. W przypadku indeksów Standard & Poor's Commodity Index oraz Deutsche Bank Liquid Commodity Index jest to ponad 20%. Udział zbóż w zależności od indeksu waha się od 10 do ponad 20%.

Jednak działalność w branży rolnej wiąże się z pewnym ryzykiem. Zazwyczaj podaje się dwa podstawowe źródła ryzyka na rynkach rolnych:

- ryzyko rozmiarów produkcji (*production* lub *yield risk*), którego główną przyczyną są takie czynniki, jak warunki pogodowe oraz choroby upraw i zwierząt,
- ryzyko cenowe.

Ta druga kategoria – ryzyko zmiany cen towarów – jest wymieniana wśród rodzajów ryzyka rynkowego, obok ryzyka zmiany ceny akcji, kursów walutowych i stóp procentowych.

Podstawowym podejściem stosowanym do oceny ryzyka zmiany ceny jest tzw. zmienność historyczna, szacowana na bazie historycznych cen towarów. Parametr zmienności

jest też jednym z czynników, wpływających na wartość opcji i ma dodatni wpływ zarówno w przypadku opcji kupna, jak i opcji sprzedaży. Skutkiem przyjęcia zawyżonej zmienności jest przeszacowanie wartości premii opcyjnej, podczas gdy zaniżona zmienność spowoduje niedoszacowanie premii.

Modele wyceny opcji znajdują zastosowanie w prognozowaniu [Kolb, Overdahl 2007]. Do krótkookresowej prognozy wartości (cen) towarów lub instrumentów finansowych można wykorzystać prawidłowo wyspecyfikowany model dwumianowy. Ten model został zaproponowany w 1979 roku przez Coxa, Rossa i Rubinsteina i stał się, obok modelu Blacka-Scholesa [1973], jedną z najpopularniejszych metod wyceny opcji, zarówno o europejskim, jak i amerykańskim<sup>1</sup> stylu wykonania. W modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina wymagane są pewne parametry wejściowe, spośród których jedynie zmienność historyczna cen instrumentu bazowego nie może być bezpośrednio obserwowana na rynku. W efekcie pojawia się konieczność wyboru postaci estymatora zmienności.

W praktyce do oceny historycznej zmienności cen najczęściej stosuje się odchylenie standardowe stóp zwrotu, wyrównywanie wykładnicze EWMA (ang. *exponentially weighted moving average*) oraz model GARCH (p, q). Badania prowadzone przy zastosowaniu każdej z wymienionych metod często dają odmienne wyniki. Stąd celem pracy jest ocena wpływu zmienności (w zależności od przyjętej metody szacowania) na przewidywane ceny zbóż otrzymywane w modelu dwumianowym. Badaniem objęto ceny zbóż w Polsce w okresie od 27.12.2004 do 25.04.2010 roku.

## MATERIAŁ EMPIRYCZNY I METODA BADANIA

Badania prezentowane w artykule stanowią kontynuację badań, których wyniki przedstawiono w publikacji Bolesława Borkowskiego i Moniki Krawiec [2010]. Autorzy na podstawie średnich tygodniowych cen pszenicy konsumpcyjnej, kukurydzy paszowej i jęczmienia paszowego w Polsce (w zł/t), gromadzonych w ramach Zintegrowanego Systemu Rolniczej Informacji Rynkowej i udostępnionych na stronie internetowej Ministerstwa Rolnictwa i Rozwoju Wsi [www.minrol.gov.pl], szacowali zmienność historyczną cen. W tym celu wykorzystali następujące metody:

1. Odchylenie standardowe wyrażone wzorem [Tarczyński 2003]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \cdot \sqrt{N}, \quad (1)$$

gdzie:  $\left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$  dla  $i = 1, \dots, n$  ( $S_i$  –  $i$ -ta cena instrumentu bazowego),

$n$  – liczba obserwacji,

$\bar{u}$  – średnia arytmetyczna wartość wyznaczona z  $u_i$ ,

$N$  – liczba przedziałów czasowych (dla danych tygodniowych  $N=52$ ).

<sup>1</sup> Opcje amerykańskie (*American options*) mogą być wykonane w dowolnym dniu w ciągu życia opcji. Natomiast opcje europejskie (*European options*) można wykonać wyłącznie w dniu wygaśnięcia kontraktu.

2. Procedurę EWMA, którą opisuje następująca formuła rekurencyjna [Hull 2003]:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2, \quad (2)$$

gdzie:

$\sigma_n$  – bieżąca zmienność,

$\sigma_{n-1}$  – zmienność wyznaczona dla poprzedniej obserwacji,

$u_{n-1}$  – ostatnia (najnowsza) zmiana procentowa ceny.

Otrzymany wynik również należy pomnożyć przez pierwiastek z „N”. Parametr  $\lambda$  przyjmuje wartości z przedziału od 0 do 1. W literaturze można spotkać różne rekomendacje odnośnie jego optymalnej wartości [Alexander 1996, Haug 2007].

3. Zmienność długookresową, wyznaczoną na podstawie oszacowanego modelu GARCH (1, 1) w następujący sposób [Rouah, Vainberg 2007]:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}, \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (4)$$

gdzie:  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\omega$  – parametry modelu GARCH postaci:

$$y_t = a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (6)$$

przy czym  $\omega \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$ .

GARCH (1, 1) to najczęściej wykorzystywana postać modeli tej klasy. Modele wyższego rzędu są stosowane rzadziej. Otrzymaną wartość  $\sigma$  również należy pomnożyć przez  $\sqrt{N}$ .

Wartości zmienności historycznej, uzyskane za pomocą wymienionych metod, zostaną wykorzystane do wyznaczenia możliwych do osiągnięcia poziomów cen w drzewie dwumianowym. Praktyczne wykorzystanie modelu dwumianowego wymaga założenia, że zmiany cen instrumentu bazowego składają się z dużej liczby niewielkich zmian dwumianowych. W pierwszym kroku dzieli się rozpatrywany horyzont czasowy (w przypadku opcji – czas do wygaśnięcia kontraktu) na wiele przedziałów czasowych, z których każdy ma długość  $\Delta t$ . Każdy z tych przedziałów ma wartość początkową  $S$  i dwie wartości  $S \cdot u$  i  $S \cdot d$ , dla których prawdziwe są założenia:  $u > 1$ ,  $d < 1$ . Prawdopodobieństwo wzrostu ceny instrumentu bazowego z  $S$  do  $S \cdot u$  jest równe  $p$ , zaś spadku z  $S$  do  $S \cdot d$  wynosi  $(1 - p)$ . Wielkości  $p$ ,  $u$ ,  $d$  wyznacza się według wzorów:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (7)$$

$$d = \frac{1}{u}, \quad (8)$$

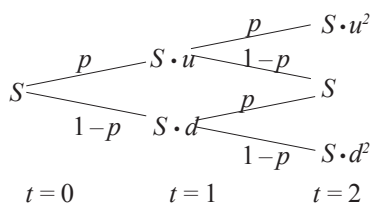
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad (9)$$

gdzie:

$\sigma$  – parametr zmienności,

$r$  – stopa wolna od ryzyka<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Stopa wolna od ryzyka oznacza stopę procentową dla lokat w papiery skarbowe lub banku centralnego o tym samym okresie zapadnięcia, co rozliczenie kontraktu, np. dla 3-miesięcznego kontraktu będzie to rentowność bonu skarbowego zapadającego za trzy miesiące. W praktyce wygodniejsze jest posługiwanie się odpowiednimi stawkami WIBOR [Sopoćko 2005].



Rysunek 1. Dwukresowe drzewo dwumianowe  
Źródło: opracowanie własne.

Początkowy moment, w którym jest znana cena instrumentu bazowego  $S$ , określa się jako zerowy. W pierwszym okresie  $\Delta t$  występują dwie możliwości, odpowiadające wzrostowi ceny  $S \cdot u$  i spadkowi ceny  $S \cdot d$ . W drugim okresie, oznaczonym jako  $2 \cdot \Delta t$ , możliwe są już trzy poziomy cenowe  $S \cdot u^2$ ,  $S$  oraz  $S \cdot d^2$ , co przedstawiono na rysunku 1. Uogólniając to na  $i$  okresów można zauważyć, że w okresie  $i \cdot \Delta t$  występuje  $i+1$  możliwych do osiągnięcia poziomów cenowych, do których można dojść na  $2^i$  sposobów. Podtrzymując wprowadzone oznaczenia, każdy możliwy do osiągnięcia poziom cenowy można obliczyć dzięki wzorowi:

$$S \cdot u^j \cdot d^{i-j}, \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, i \quad (10)$$

gdzie:

$S$  – cena instrumentu bazowego w momencie zerowym,

$u, d$  – parametry wyznaczone według wzorów (7) i (8),

$i$  – określa poziom drzewa (liczbę kroków),

$j$  – pozycja węzła na  $i$ -tym poziomie liczona od dołu od wartości zero [Tarczyński 2003].

## WYNIKI BADAŃ

W związku z tym, że wartości zmienności historycznej cen wybranych zbóż w Polsce, podane w pracy Borkowskiego i Krawiec [2010], zostały oszacowane na podstawie danych obejmujących okres od 27.12.2004 do 07.02.2010 (tab. 1.), jako moment zerowy w prowadzonych obecnie badaniach ( $t=0$ ) przyjęto datę 08.02.2010 roku. Ceny poszczególnych zbóż w momencie  $t=0$ , kształtowały się następująco:

- dla pszenicy konsumpcyjnej  $S_1=489$  zł/t,
- dla kukurydzy paszowej  $S_2= 517$  zł/t,
- dla jęczmienia paszowego  $S_3= 408$  zł/t.

W pierwszym etapie horyzont badania ograniczono do pięciu tygodni. W konsekwencji, jako stopę wolną od ryzyka, przyjęto stawkę WIBOR 1M, która w dniu 08.02.2010 roku wynosiła 3,62%.

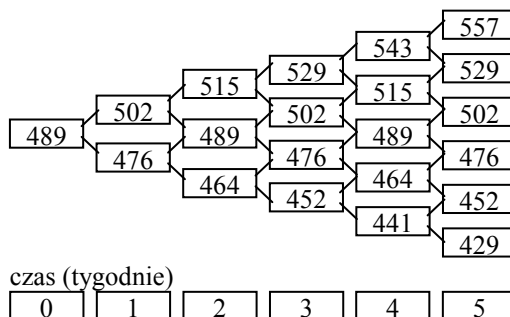
Jako pierwszy towar rozpatrywano pszenicę konsumpcyjną. Stosując drzewa dwumianowe, wyznaczono przewidywane wartości cen pszenicy w ciągu kolejnych 5 tygodni z wykorzystaniem poszczególnych wartości zmienności historycznej podanych w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki oszacowań zmienności historycznej cen wybranych zbóż w Polsce w okresie 27.12.2004-07.02.2010

Gatunek zboża	Odchylenie standardowe	EWMA ( $\lambda=0,6$ )	EWMA ( $\lambda=0,95$ )	GARCH (1,1)
Pszenica konsumpcyjna	0,1875	0,0884	0,1791	0,1897
Kukurydza paszowa	0,2143	0,0622	0,2197	0,2697
Jęczmień paszowy	0,3078	0,4006	0,3664	0,4941

Źródło: [Borkowski, Krawiec 2010, s. 44]

Na rysunku 2. przedstawiono otrzymane wyniki dla zmienności wyrażonej odchyleniem standardowym. Na tej podstawie można zauważyć, że najwyższa możliwa do osiągnięcia po pięciu tygodniach cena pszenicy konsumpcyjnej to 557 zł/t. Z kolei najniższy możliwy do osiągnięcia poziom to 429 zł/t. Analogiczne drzewa budowano dla pozostałych typów zmienności i wszystkich analizowanych zbóż. W efekcie otrzymano 12 pięciookresowych drzew dwumianowych – po 4 dla każdego gatunku zbóż (nie zamieszczono ich w pracy).



Rysunek 2. Drzewo dwumianowe opisujące ceny pszenicy konsumpcyjnej w kolejnych pięciu tygodniach wyznaczone z wykorzystaniem zmienności historycznej w postaci odchylenia standardowego

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Wartości MAPE [%] w zależności od zastosowanej metody szacowania zmienności uzyskane na podstawie wyników z pięciookresowych drzew dwumianowych

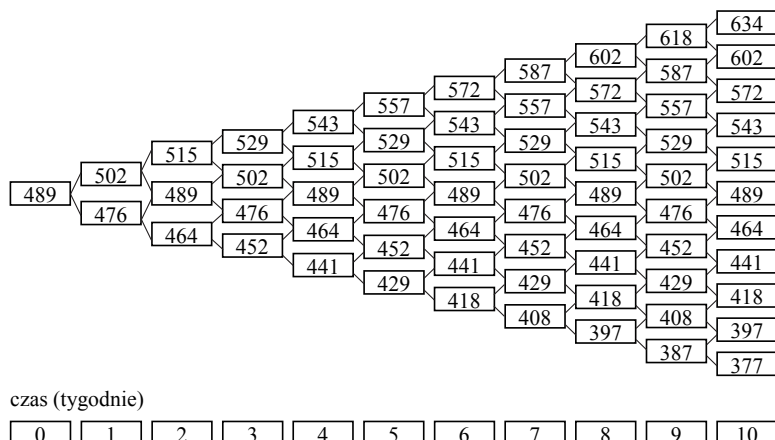
Gatunek zboża	Metoda szacowania zmienności			
	odchylenie standardowe	EWMA 0,6	EWMA 0,95	GARCH (1,1)
Pszenvica konsumpcyjna	1,38	0,19	1,27	1,40
Kukurydza paszowa	1,57	0,28	1,60	2,01
Jęczmień paszowy	2,03	2,87	2,60	4,00

Źródło: obliczenia własne.

W celu określenia *ex post* dokładności szacunków otrzymanych przy zastosowaniu drzew dwumianowych i różnych sposobów oceny zmienności, analogicznie jak w pracy Agnieszki i Sebastiana Majewskich [2003], z każdego drzewa wybierano wyniki znajdujące się najbliżej rzeczywistych cen zbóż w kolejnych tygodniach. Wykorzystano je do obliczenia średnich bezwzględnych błędów prognozy (MAPE), zestawionych w tabeli 2.

Na podstawie wyników podanych w tabeli 2. można zauważyć, że w przypadku pszenicy konsumpcyjnej najniższą wartość MAPE uzyskano wówczas, gdy do wyznaczenia przyszłych cen wykorzystano procedurę EWMA z parametrem  $\lambda=0,6$ . Podobna sytuacja występuje dla kukurydzy paszowej. Natomiast dla jęczmienia paszowego najniższą wartość MAPE otrzymano w wypadku odchylenia standardowego. Należy zauważyć, że najniższe wartości MAPE uzyskano dzięki metodom, które wygenerowały najniższą wartość zmienności historycznej. Oznacza to, że pozostałe procedury wygenerowały zawyżoną zmienność historyczną.

W drugim etapie horyzont badania wydłużono do 10 tygodni. W związku z tym, jako stopę wolną od ryzyka, przyjęto stawkę WIBOR 3M, która w dniu 08.02.2010 roku była równa 4,19%. Postępując analogicznie jak uprzednio, skonstruowano 12 drzew dwumianowych (po 4 dla każdego gatunku zbóż), opisujących możliwe do osiągnięcia poziomy cen w 10. kolejnych tygodniach. Na rysunku 3. przedstawiono wyniki dla pszenicy konsumpcyjnej uzyskane z wykorzystaniem zmienności historycznej w postaci odchylenia standardowego. Jak można zauważyć, po upływie 10 tygodni najwyższy możliwy do osiągnięcia poziom ceny to 634 zł/t. Natomiast najniższa możliwa do osiągnięcia cena wynosiła 377 zł/t.



Rysunek 3. Drzewo dwumianowe opisujące ceny pszenicy konsumpcyjnej w kolejnych dziesięciu tygodniach wyznaczone z wykorzystaniem zmienności historycznej w postaci odchylenia standardowego

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Wartości MAPE [%] w zależności od zastosowanej metody szacowania zmienności uzyskane na podstawie wyników z dziesięciookresowych drzew dwumianowych

Gatunek zboża	Metoda szacowania zmienności			
	odchylenie standardowe	EWMA 0,6	EWMA 0,95	GARCH (1,1)
Pszenica konsumpcyjna	1,35	0,51	1,29	1,35
Kukurydza paszowa	1,58	0,36	1,63	2,09
Jęczmień paszowy	1,84	2,90	2,56	4,08

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie wyników z dziesięciookresowych drzew dwumianowych wyznaczono wartości MAPE, które zestawiono w tabeli 3.

Na podstawie danych z tabeli 3. można stwierdzić, że również w dłuższym okresie najniższe wartości MAPE otrzymano dla tych metod, które wygenerowały najniższe wartości zmienności historycznej. Analogicznie jak w krótszym okresie, również tym razem była to procedura EWMA z parametrem  $\lambda=0,6$  (dla pszenicy konsumpcyjnej i kukurydzy paszowej) oraz odchylenie standardowe (dla jęczmienia paszowego).

## PODSUMOWANIE

Od ponad dekady badania zmienności instrumentów finansowych należą do dynamicznie rozwijających się obszarów w ramach teorii finansów i ekonometrii finansowej. Uważa się, że zmienność ceny instrumentu finansowego lub towaru jest miarą niepewności co do jej kształtowania się w przyszłości. Zmienność jest również kluczowym parametrem, wykorzystywanym przy szacowaniu wartości narażonej na ryzyko, optymalizacji portfela i wycenie instrumentów pochodnych [Doman, Doman 2004].

Charakterystyczną cechą zmienności jest to, że w odróżnieniu od ceny, nie można jej bezpośrednio obserwować na rynku. Stwarza to konieczność poszukiwania różnego rodzaju miar zmienności. Najmniej skomplikowanym sposobem jej mierzenia jest zastosowanie odchylenia standardowego. Istnieją również inne modele pomiaru zmienności. Do często stosowanych należy wykładniczo ważona średnia ruchoma (EWMA) i modele GARCH. Należy jednak pamiętać, że w każdej z wymienionych metod można otrzymać inny wynik.

W artykule badano wpływ zmienności w zależności od przyjętej metody szacowania na przewidywane ceny zbóż, otrzymane w modelu dwumianowym. Uzyskane wyniki pozwoliły stwierdzić, że w badanym okresie najlepsze prognozy cen rozpatrywanych zbóż uzyskano w przypadku procedur, które wygenerowały najniższe wartości zmienności historycznej. Jednak przeprowadzone badania nie upoważniają do uogólnienia wniosków i jednoznacznego wskazania najlepszej metody. Wymaga to dalszych badań i wielu symulacji. Stąd niniejszą pracę należy traktować jako przyczynek do szerszych badań w tym zakresie.

#### LITERATURA

- Alexander C. 1996: *Risk management and analysis*, John Wiley&Sons, London.
- Black F., Scholes R. 1973: *The pricing of options and corporate liabilities*, "Journal of Political Economy" 81, s. 637-654.
- Borkowski B., Krawiec M. 2010: *Modelowanie zmienności cen na rynku zbóż w Polsce*, „Roczniki Naukowe SERiA”, t. XII, z. 4, s. 39-45.
- Cox J., Ross S., Rubinstein M. 1979: *Option pricing: a simplified approach*, "Journal of Financial Economics" 7, s. 145-166.
- Doman M., Doman R. 2004: *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Prace habilitacyjne, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
- Haug E. G. 2007: *Option pricing formulas*, McGraw-Hill, New York.
- Hull J.C. 2003: *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall, New Jersey.
- Kolb R.W., Overdahl J. A. 2007: *Futures, options and swaps*, Blackwell Publishing, Malden.
- Majewska A., Majewski S. 2003: *Wykorzystanie drzewa dwumianowego do określania przyszłych wartości indeksu WIG 20. Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 990, s. 342-346.
- Rouah F., Vainberg G. 2007: *Option pricing models & volatility*, John Wiley&Sons, Hoboken, New Jersey.
- Sopoćko A. 2005: *Rynkowe instrumenty finansowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Tarczyński W. 2003: *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, PWE, Warszawa.

Monika Krawiec

#### AN ANALYSIS OF IMPACT OF HISTORICAL VOLATILITY ESTIMATION METHOD ON PREDICTED GRAIN PRICES IN THE BINOMIAL MODEL

##### Summary

Volatility is the basic parameter used to calculate value at risk, to optimize portfolio or to evaluate options. There are several methods to estimate the volatility. The most popular are following: standard deviation, EWMA and GARCH (p,q) concepts. Each of them may provide different results. The aim of the paper is to assess the impact of volatility on predicted grain prices in the binomial model with respect to the method of volatility estimation. The research focuses on grain prices in Poland and covers the period from 27.12.2004 to 25.04.2010.

Adres do korespondencji:

dr Monika Krawiec

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego

Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki, Katedra Ekonometrii i Statystyki

ul. Nowoursynowska 159, 02-787 Warszawa

e-mail: krawiec.monika@gmail.com