ROCZNIKI NAUK ROLNICZYCH, SERIA G, T. 96, z. 2, 2009

O PEWNYCH METODACH PORZĄDKOWANIA I GRUPOWANIA W ANALIZIE ZRÓŻNICOWANIA ROLNICTWA

Zbigniew Binderman[*], *Bolesław Borkowski*[*], *Wiesław Szczesny*[**]

*Katedra Ekonometrii i Statystyki Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Kierownik: dr hab. Zbigniew Binderman
**Katedra Informatyki Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Kierownik: dr hab. Arkadiusz Orłowski, prof. SGGW

Słowa kluczowe**:** poziom rozwoju rolnictwa, mierniki syntetyczne, funkcje użyteczności, uporządkowanie liniowe, klasyfikacja
Key words: agriculture development level, synthetic measures, utility functions, voivodeships class division

S y n o p s i s. Przedstawiono teorie i zastosowania wybranych metod porządkowania i grupowania obiektów, na przykładzie stanu rolnictwa według województw w Polsce w 2006 roku. Rozważane metody wykorzystują funkcje użyteczności. Do konstrukcji miernika syntetycznego zastosowano metody nieliniowe i metodę liniową. Użyto metody bezwzorcowe oraz jedną metodę wykorzystującą dwa wzorce.

WSTĘP

Praca ma charakter metodyczno-empiryczny. Omówiono teorię i przybliżono, na empirycznym przykładzie, wykorzystanie niektórych metod porządkowania i grupowania obiektów. W badaniach ekonomiczno-rolniczych opartych na materiale empirycznym prawie zawsze występuje konieczność klasyfikacji i grupowania gospodarstw rolniczych. Wynika to z dużego zróżnicowania przestrzennego potencjału rolniczego oraz różnego poziomu czynników produkcji w gospodarstwach. W metodologii nauk ekonomiczno-społecznych przyjmuje się, że klasyfikacja otaczającej nas rzeczywistości jest pierwszym z podstawowych celów nauki, będąc jednocześnie narzędziem i celem poznania [Pociecha 2008]. Nauka o zasadach klasyfikacji nazywana jest taksonomią, której działem jest taksometria, zajmująca się klasyfikacją obiektów w wielowymiarowej przestrzeni cech przy pomocy metod ilościowych [Hellwig 1990]. Podstawowym celem analizy taksonomicznej jest dokonanie grupowania i porządkowanie obiektów (jednostek) będących elementami wielowymiarowej przestrzeni zmiennych. Do klasyfikacji i grupowania obiektów stosowanych jest wiele metod [Bartosiewicz 1976, Cieślak 1976, Borys 1978, Hellwig 1968, 1979, 1981, 1981a, Kukuła 2000, Malina 2004, Młodak 2006, Pociecha i in. 1988, Strahl 1990, Zeliaś 2000]. W pierwszej kolejności, przy stosowaniu metod porządkowania liniowego, musimy ujednolicić charakter zmiennych (dokonać transformacji normalizacyjnej). Formuły normalizacyjne powinny być dobierane starannie uwzględniając rodzaj skal pomiaru (nominalną, porządkową, przedziałową i ilorazową) [Kukuła 2000]. Najczęściej w literaturze naukowej do porządkowania obiektów wykorzystywane są dwie grupy metod (wzorcowe i bezwzorcowe).

Metody bezwzorcowe polegają na konstrukcji miernika syntetycznego agregatowego na podstawie tylko znormalizowanych wartości zmiennych. Metody wzorcowe polegają na skonstruowaniu taksonomicznego miernika rozwoju (sztucznego punktu odniesienia), mierzeniu odległości od tego wzorca i na tej podstawie konstruowania miernika syntetycznego.

Przy wykorzystaniu wskaźników syntetycznych zmienne traktowane są jako cechy diagnostyczne, które można podzielić na stymulanty, destymulanty oraz nominanty badanego zjawiska [Borkowski, Dudek, Szczesny 2003, 2006, Młodak 2006, Zeliaś 1997]. Stymulanty są to takie cechy, dla których wyższe wartości odpowiadają wyższemu poziomowi rozważanego zjawiska, danego obiektu. Destymulanty przeciwnie, wyższe wartości odpowiadają niższemu poziomowi. Nominanty natomiast są takimi cechami, których pewne wartości pozwalają zakwalifikować dany obiekt jako lepszy z punktu widzenia pewnego kryterium agregatowego, natomiast wszystkie pozostałe obiekty opisywane przez pozostałe wartości nie są lepsze ze względu na to kryterium.

Przeprowadzone badania wykazały [Borkowski, Dudek, Szczesny 2006], że sposób normowania, jak i sposób przekształcania destymulant na stymulanty ma wpływ na uzyskany porządek. W niniejszym artykule rozpatrzono kilka wariantów normowania oraz odwracania cech. Następnie na wybranym materiale empirycznym dotyczącym rolnictwa w ujęciu regionalnym dokonano uporządkowanego grupowania. W tym celu wykorzystano dwie metody podziału zbioru wartości wskaźnika syntetycznego.

METODY BADAWCZE

W pracy zaprezentowano teorie i zastosowania wybranych metod porządkowania i grupowania oparte o funkcje użyteczności. Omawiane metody wymagają dodatnich wartości cech będących stymulantami. Normalizacji cech dokonano przy użyciu dwóch metod: unitaryzacji zerowanej oraz metody ilorazowej [Borkowski, Dudek, Szczesny 2006]. Zamiany cech o charakterze destymulant w materiale empirycznym dokonano używając standardowych technik prezentowanych w literaturze przedmiotu {por. wzory (2b), (2d)}.

W dalszej części bez straty ogólności rozważań założono, że dane zjawisko jest opisane przez zmienne będące stymulantami. Osiągnięto to przez eliminację zmiennych neutralnych, nadanie zmiennym jakościowym wartości liczbowych, przekształcenie destymulant w stymulanty (tzw. odwrócenie wartości destymulant). Bez straty dla ogólności rozważań, założono również, że badane stymulanty po dokonaniu normalizacji i zmianie układu współrzędnych przez przesunięcie, mają wartości nieujemne. Przy takim podejściu dany obiekt (obserwacja) badanego zjawiska jest opisany za pomocą wektora, będącego elementem przestrzeni $\Re^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n): x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}$, gdzie $n \geq 1$ liczba zmiennych zakwalifikowanych do oceny zjawiska.

Rozważmy teraz problem polegający na klasyfikacji $m \in N$ obiektów $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ..., \mathbf{Q}_m$ badanego zjawiska za pomocą $n \in N$ zmiennych (cech). Niech wektor $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, $i = 1, 2, ..., m$, opisuje i-ty obiekt.

Jeżeli $x_{ik} > x_{jk}$ ($x_{ik} \geq x_{jk}$) dla $k = 1, 2, ..., n$, to pisać będziemy

$\mathbf{x}_i > \mathbf{x}_j$, ($\mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_j$),

gdzie $i, j \in [1, m]$.

Jeżeli $\mathbf{x}_i > \mathbf{x}_j$ i $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ to naturalnym jest nazywać obiekt $\mathbf{x}_i$ lepszym (wyżej ocenianym) od obiektu $\mathbf{x}_j$. Oznacza to, że żadna ze składowych wektora $\mathbf{x}_i$ nie jest mniejsza od odpowiednich składowych wektora $\mathbf{x}_j$, a przynajmniej jedna z nich ma wartość większą, tj. istnieje takie $k \in [1,n]$, że $x_{ik} > x_{jk}$.

W celu uporządkowania rozważanych obiektów przyjmijmy następującą definicję funkcji użyteczności będącą liczbową charakterystyką naszych preferencji (porównaj z definicją funkcji użyteczności w teorii popytu w warunkach niedosytu [Allen 1964, Panek 2000]).

Definicja 1. Każdą rosnącą funkcję $u : \Re_+^n \rightarrow \Re$ nazywać będziemy funkcją użyteczności. Z definicji wynika, że dla dowolnej pary wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re_+^n$ spełniona jest implikacja: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$. Dlatego w pracy obiekt $\mathbf{x}$ uważany będzie za lepszy od obiektu $\mathbf{y}$, jeżeli $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, co oznacza, że obiekt lepszy od drugiego, ma większą od niego użyteczność. Obiekty $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ uważane są za jednakowo dobre (obojętne), względem przyjętej funkcji użyteczności u, jeżeli $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y})$. W pierwszym przypadku mówić będziemy, że obiekt $\mathbf{x}$ jest silnie preferowany nad $\mathbf{y}$, w drugim, że obiekty $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$ są indyferentne.

Definicja 2. Zbiór obiektów mających tą samą użyteczność, co wybrany obiekt x_i, przy ustalonej funkcji użyteczności nazywać będziemy obszarem obojętności (indyferencji) i oznaczać przez $O_{\mathbf{x}_i}$, tj.: $O_{\mathbf{x}_i} := \{\mathbf{x}_j : u(\mathbf{x}_j) = u(\mathbf{x}_i)\}$.

W literaturze, do klasyfikacji obiektów wykorzystuje się wiele różnych sposobów wyznaczania mierników syntetycznych rozważanych obiektów. W podanych niżej metodach autorzy przedstawili ostatnie rezultaty badań pracowników Wydziału Zastosowań Informatyki i Matematyki SGGW w Warszawie.

METODA OPARTA NA DWÓCH WZORCACH

Najczęściej w badaniach ekonomiczno-rolniczych do konstrukcji miernika syntetycznego wykorzystywany jest jeden wzorzec, np. metoda Hellwiga [1968]. Można podać wiele przykładów, które pokazują, że wybór wzorca odgrywa istotną rolę dla rankingów, jak również przy grupowaniu obiektów [Binderman 2004, 2005, 2006, 2007, 2008].

W pracach Binderman [2006, 2007, 2008] do porządkowania i grupowania obiektów wykorzystała jednocześnie dwa wzorce, jak również funkcje użyteczności w warunkach niedosytu. Mierniki syntetyczne pozwalają zarówno uporządkować rozważane obiekty, jak również dokonać ich grupowania.

W tej pracy przedstawiono metodę wyznaczania wskaźnika syntetycznego opartą na dwóch wzorcach. Przyjęto następujące oznaczenia:

$$x_{m+1,k} = \max_{1 \leq i \leq m} x_{ik}, \quad x_{0,k} = \min_{1 \leq i \leq m} x_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

oraz

$\mathbf{x}_0 := (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$, $\mathbf{x}_{m+1} := (x_{m+1,1}, x_{m+1,2}, \ldots, x_{m+1,n})$.

Tak określone obiekty $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{m+1}$ (być może fikcyjne) są niegorsze, nielepsze od pozostałych $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, tj.

$\mathbf{x}_{m+1} \geq \mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_0$ dla każdego i: $m \geq i \geq 1$.

W przypadku gdy obiekty $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}_{m+1}$ są różne od rozważanych obiektów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$, to obiekty te spełniają rolę obiektu najlepszego oraz obiektu najgorszego i będą odpowiednio traktowane, jako wzorce. Naturalnym jest, wybór takiego kryterium klasyfikacji obiektów, według którego dwa obiekty o identycznych odległościach od obiektu najlepszego i najgorszego byłyby „jednakowo dobre" (były względem siebie obojętne, tj. miały tę samą użyteczność).

Niech d oznacza dowolną metrykę Minkowskiego:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - y_j \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ...y_n) \in \Re_+^n, \ 1 \le p < \infty$$

Definicja 3. Funkcję użyteczności u, która spełnia warunek: $u(\mathbf{x}_0) = 0$ i $u(\mathbf{x}_{m+1}) = 1$, nazywano znormalizowaną funkcją użyteczności. Można udowodnić następujące twierdzenia [Binderman 2006].

Twierdzenie 1. Niech d oznacza dowolną metrykę Minkowskiego, $1 \le p < \infty$, $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}_{m+1} \ge \mathbf{x} \ge \mathbf{x}_0$ wówczas funkcja:

$$U(\mathbf{x}) := \frac{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{m+1})}{2d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1})}, \quad \mathbf{x}_0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_{m+1}, \tag{1}$$

jest znormalizowaną funkcją użyteczności, przyjmującą wartości z przedziału [0, 1].
Liczbę

$$U(\mathbf{x}_i) = \frac{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}) - d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1})}{2d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1})}, \qquad i = 0, 1, ..., m, m+1, \tag{1'}$$

nazywać będziemy wzorcowym miernikiem syntetycznym obiektu $\mathbf{Q}_i$.
Można pokazać, że

– jeżeli $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{m+1})$ i $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0)$ to $U(\mathbf{x}_i) = U(\mathbf{x}_j)$,
– $0 \le U(\mathbf{x}_i) \le 1$, $i = 1, \ldots, m$, $U(\mathbf{x}_0) = 0$, $U(\mathbf{x}_{m+1}) = 1$,
– jeżeli $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{m+1})$ to $U(\mathbf{x}_i) = 1/2$.

Pierwsza z powyższych własności pokazuje, że obiekty o identycznych odległościach od obiektu najlepszego i najgorszego mają tą samą wartość miernika syntetycznego. Z własności trzeciej wynika, że obiekty jednakowo odległe od wzorców mają wzorcowy miernik syntetyczny równy 1/2.

W szczególności, jeżeli $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{1}$ oraz $\mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{1}$ to

$$U(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{0}, \mathbf{1}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{1})}{2d(\mathbf{0}, \mathbf{1})}, \tag{1''}$$

gdzie $\mathbf{0} := (0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1)$, jest funkcją rosnącą dla $\mathbf{x} \ge 0$ oraz $U(\mathbf{a}) = a$, gdzie $\mathbf{a} = (a, a, \ldots, a)$, $0 \le a \le 1$. Oczywiście w powyższym przypadku $U(\mathbf{0})=0$, $U(\mathbf{1/4}) = 1/4$, $U(\mathbf{1/2}) = 1/2$, $U(\mathbf{3/4}) = 3/4$, $U(\mathbf{1}) = 1$.

Zauważmy ponadto, że w przypadku dwóch zmiennych (n=2) obszar obojętności danego obiektu, generowany przez funkcję U jest hiperbolą [Binderman 2007].

METODY RADAROWE WYZNACZANIA MIERNIKÓW SYNTETYCZNYCH

Rozważmy problem polegający na klasyfikacji $m \in N$ obiektów $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m$ badanego zjawiska za pomocą $n \in N$ zmiennych (cech). Niech wektor $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$, $i = 1,2,\ldots,m$, opisuje i-ty obiekt.

W klasyfikacji obiektów powszechnie stosowany jest bezwzorcowy miernik syntetyczny obiektów [Cieślak 1974, Kukuła 2000], który wykorzystuje normalizację zmiennych, zwaną unitaryzacją zerowaną:

– dla stymulant

$$x_{ij} := \frac{y_{ij} - y_{0j}}{y_{m+1j} - y_{0j}}, \tag{2a}$$

– dla destymulant

$$x_{ij} := \frac{y_{m+1j} - y_{ij}}{y_{m+1j} - y_{0j}}, \tag{2b}$$

gdzie:

$$y_{m+1j} := \max_{1 \le i \le m} y_{ij}, \quad y_{0j} =: \min_{1 \le i \le m} y_{ij}, \quad y_{0j} \ne y_{m+1j}$$

oraz przekształcenie ilorazowe:

– dla stymulant

$$x_{ij} := \frac{y_{ij}}{\overline{y_j}}, \tag{2c}$$

– dla destymulant

$$x_{ij} := \frac{\overline{y_j}}{y_{ij}}, \tag{2d}$$

gdzie:

$$\overline{y_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_{ij}$$

Na jej podstawie, miernik syntetyczny obiektu $\mathbf{Q}_i$ (określany już za pomocą zdefiniowanego wyżej wektora $\mathbf{x}_i$) jest obliczany według wzoru:

$$m(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}, \; i = 1,2,\ldots,m. \tag{3}$$

Stosowana często metoda wykorzystująca wykresy radarowe do porządkowania obiektów, zależy w istotny sposób od kolejności cech opisujących dany obiekt. Przedstawione poniżej metody są pozbawione tej wady [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008, Binderman, Szczesny 2009].

Rozważmy obiekt opisany za pomocą zestawu n (n > 2) cech. W celu geometrycznego przedstawienia metod porządkowania obiektów wpiszmy n-wielokąt foremny w koło jednostkowe (o promieniu r = 1) o środku w początku układu współrzędnych 0wz i połączmy wierzchołki tego wielokąta ze środkiem układu. Otrzymane w ten sposób odcinki prostych o długości 1 oznaczmy kolejno przez O**1**, O**2**, ..., 0**n**, dla ustalenia uwagi poczynając od odcinka leżącego na osi w. Jeżeli cechy obiektu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ mają wartości liczbowe z przedziału <0, 1>, tj. $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \equiv 0 \leq x_i \leq 1$, i = 1, 2, ... n, gdzie $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ to możemy wartości cech tego obiektu przedstawić za pomocą wykresu radarowego. W tym celu oznaczmy przez x_i punkty na osi 0i powstające z przecięcia się osi 0i z okręgiem o środku w początku układu i promieniu równym x_i, i = 1, 2, ..., 8. Łącząc punkty x_1 z x_2, x_2 z x_3, ..., x_n z x_1 otrzymujemy *n*-wielokąt, którego pole S_1 określone jest za pomocą wzoru:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i x_{i+1} \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}, \text{ gdzie } x_{n+1} := x_1.$$

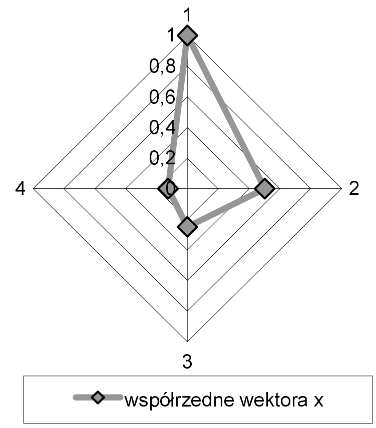
Pole wpisanego w okrąg *n*-wielokąta foremnego określa wzór:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}.$$

zaś stosunek pól tych wielokątów S_1/S_0 określa liczba

$$\hat{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}$$

Rysunek 1 podaje ilustracje dla wektora $\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$, $n = 4$.



Rysunek 1. Wykres radarowy
Źródło: badania własne.

Liczba $\hat{S}(\mathbf{x}) \in <0, 1>$ jest często stosowana (zdaniem autorów niesłusznie) jako miernik syntetyczny obiektu **x**.

Zauważmy, że taki sposób obliczania miernika syntetycznego danego obiektu w istotny sposób zależy od uporządkowania cech, świadczy o tym następujący przykład [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008].

Przykład 1. Niech będzie dany obiekt **Q**, którego cechy pozwalają go opisać za pomocą rozważanego wyżej wektora $\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Liczba permutacji zbioru współrzędnych wektora **x** jest równa 4!, czyli 24 [zob. Mostowski, Stark 1977]. Każda taka permutacja tworzy wektor o czterech współrzędnych, który również może charakteryzować obiekt **Q**. A zatem widać, że w zależności od przyjętego porządku cech dany obiekt może być określany za pomocą 24 różnych wektorów $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i3}, x_{i4})$, i = 1, 2, ..., 24. Przyjmijmy następujące oznaczenia wektorów:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}), \quad \mathbf{x}_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}), \quad \mathbf{x}_3 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$$

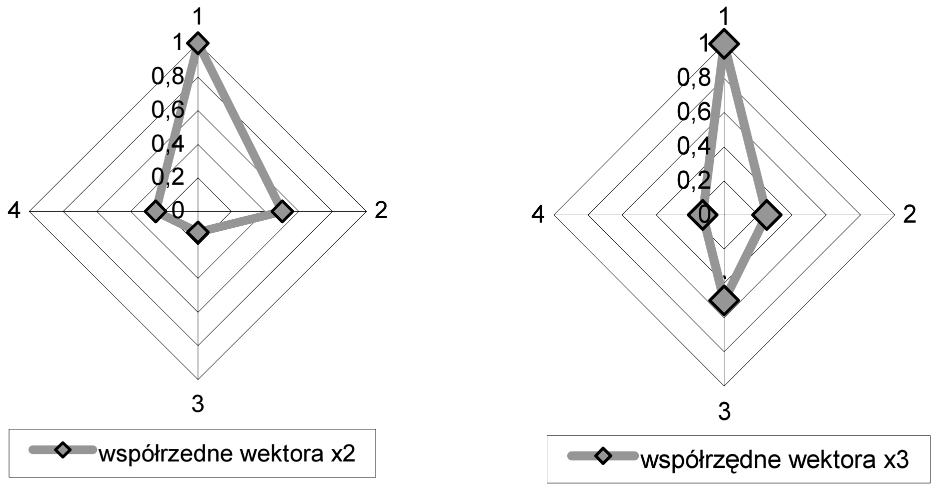
oraz

$$\mu_j := \hat{S}(\mathbf{x}_j) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{ji} x_{ji+1}, \text{ gdzie } \mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, x_{j4}), x_{j5} := x_{j1}; j = 1, 2, 3$$

Po obliczeniach, według wzoru (1) otrzymujemy mierniki syntetyczne każdego z powyższych wektorów:

$\mu_1 = 25/128$, $\mu_2 = 27/128$, $\mu_3 = 18/128$.

Z powyższych obliczeń widać, że rozważany przez nas obiekt **Q** w zależności od przyjętego porządku cech ma różne mierniki, różniące się między sobą nawet o 50%. Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono geometryczną ilustrację rozważanego przykładu.



Rysunek 2. Geometryczna ilustracja porządkowania cech
Źródło: badania własne.

W związku z powyższym przykładem załóżmy, że wektor **x** = $(x_1,x_2,...,x_n) \in \Re^1_+$ będzie dowolnie ustalony. Niech N_1 oznacza zbiór wektorów należących do $\Re^1_+$, które mają co najwyżej jedną współrzędną różną od zera. Oznaczmy *j*-tą permutację zbioru współrzędnych wektora **x** przez $\mathbf{x_j}$: = $(x_{j1},x_{j2},...,x_{jn})$, gdzie *j* = 1,2,...,n!, $\mathbf{x_1}$: = **x**. Niech **x** $\in X = \Re^n_+$ $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ k: = n! [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008; Binderman, Szczesny 2009]:

$$\mathtt{M}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_M \text{ dla } x \in X \setminus N_1, \\ \bar{x} \quad \text{dla } x \in N_1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathtt{S}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_\Xi \text{ dla } x \in X \setminus N_1, \\ \bar{x} \quad \text{dla } x \in N_1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathtt{m}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_m \text{ dla } x \in X \setminus N_1, \\ \bar{x} \quad \text{dla } x \in N_1, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie:

$$\|\mathbf{x}\|_M := \max_{1\le j\le k}\|\mathbf{x}_j\|\ ,\qquad \|\mathbf{x}\|_\Xi := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\|\mathbf{x}_j\|\ ,\qquad \|\mathbf{x}\|_m := \min_{1\le j\le k}\|\mathbf{x}_j\|$$

$$\|\mathbf{x}_j\| := \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}x_{ji+1}}\ ,\quad x_{jn+1} := x_{j1},\ j=1,2,...,k\quad \mathrm{N}_1 := \{\mathbf{x}\in\mathrm{X}: \mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, \mathrm{x}_i, 0, \ldots, 0)\},$$

nazywać będziemy radarowymi miernikami syntetycznymi wektora $\mathbf{x} \in$X, maksymalnym, średnim i minimalnym, odpowiednio.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeżeli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in$X spełniają warunki: $\mathbf{x} \ge \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$ to:

– M($\mathbf{x}$) > M($\mathbf{y}$),

– S($\mathbf{x}$) > S($\mathbf{y}$),

– m($\mathbf{x}$) ≥ m($\mathbf{y}$).

Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in$ X, wówczas przy ustalonych wartościach $x_1, x_2, ..., \mathrm{x}_{j-1}, \mathrm{x}_{j+1}, \ldots, x_n$ radarowe mierniki syntetyczne średni i maksymalny S($\mathbf{x}$) i M($\mathbf{x}$) są funkcjami rosnącymi zmiennej rzeczywistej $\mathrm{x}_j \in 0$, m($\mathbf{x}$) jest funkcją rosnącą zmiennej rzeczywistej $\mathrm{x}_j > 0$, dla $j \in [1, n]$.

Można również pokazać [Binderman, Szczesny 2009], że jeżeli x, a = (a, a, …, a) ∈ X, $a \in \Re^n_+$ to:

– **M (a**x**) = a M** (x)**; S (a**x**) = a S** (x)**; m (a**x**) = a m** (x)**,**

– M (**a**) = S (**a**) = m (**a**) = a,

– 0 ≤ m (**x**)≤ S (**x**) ≤ M (**x**) ≤ 1 dla **x**: **0** ≤ **x** ≤**1**.

W szczególności,

M (**0**) = S (**0**) = m (**0**) = 0, M (**1/4**) = S (**1/4**) = m (**1/4**) = 1/4, M (**1/2**) = S (**1/2**) = m (**1/2**) = 1/2

M (**3/4**) = S (**3/4**) = m (**3/4**) = 3/4, M (**1**) = S (**1**) = m (**1**) = 1,

gdzie wektory:

0: = (0, 0, …, 0), **1/4:** = (1/4, 1/4, …, 1/4), **1/2:** = (1/2, 1/2,…, 1/2),

3/4 = (3/4, 3/4, …, 3/4) **1** = (1, 1, …, 1).

Rozważane przez Autorów funkcje m (**x**), S (**x**), M (**x**) jak łatwo zauważyć mogą być traktowane, jako funkcje użyteczności. Funkcje te mogą również służyć do klasyfikacji (grupowania) rozważanych obiektów. Traktując je, jako mierniki rozwoju podane wyżej własności, pozwalają (przy pomocy każdego z omawianych mierników) dokonać podziału na obiekty:

– dużo poniżej oczekiwań, gdy wartość miernika należy do przedziału [0, 1/4],
– nieznacznie poniżej oczekiwań, gdy wartość miernika należy do przedziału [1/4, 1/2],
– nieznacznie powyżej oczekiwań, gdy wartość miernika należy do przedziału [1/2, 3/4],
– dużo powyżej oczekiwań, gdy wartość miernika należy do przedziału [3/4, 1].

Warto w tym miejscu wspomnieć, że są stosowane również inne metody grupowania obiektów [Gatnar, Wywiał 1997]. Najczęściej w badaniach ekonomicznych do grupowania obiektów wykorzystuje się odchylenie standardowe [Nowak 1990]. Według tej metody, w naszym przypadku, województwa dzieli się na cztery grupy, obejmujące te województwa, których mierniki syntetyczne należą do przedziałów:

$$\begin{array}{ll} [\mathrm{m}^*, \overline{\mathrm{m}} - \sigma]\ -\ \text{grupa IV}, & [\overline{\mathrm{m}} - \sigma, \overline{\mathrm{m}}]\ -\text{grupa III}, \\ [\overline{\mathrm{m}}, \overline{\mathrm{m}} + \sigma]\ -\ \text{grupa II}, & [\overline{\mathrm{m}} + \sigma, \mathrm{m}^{**}]\ -\ \text{grupa I}, \end{array} \tag{7}$$

gdzie:

$$m^* = \min_{1\le j\le m} m\left(\mathbf{x}_j\right),\quad m^{**} = \max_{1\le j\le m} m\left(\mathbf{x}_j\right),\quad \bar{m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} m\left(\mathbf{x}_j\right),\ \sigma = \left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(m(\mathbf{x}_j)-\bar{m}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

są odpowiednio, wartością minimalną, maksymalną, średnią i odchyleniem standardowym mierników syntetycznych wszystkich województw.

Nietrudno zauważyć, że w przypadku płaskim (n=2) obszar obojętności danego obiektu, generowany przez funkcje m, S i M jest hiperbolą.

WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Do weryfikacji omawianych metod wykorzystano dane empiryczne dotyczące średnich wartości wybranych cech z gospodarstw rolniczych z roku 2006 w poszczególnych 16 województwach [Harasim 2006]. Do badania przyjęto następujące cechy:

X_1 – przeciętne ceny gruntów rolnych [zł/1 ha UR],
X_2 – przeciętny dochód rozporządzalny na osobę w gospodarstwach rolniczych [zł/1 osobę],
X_3 – udział produkcji towarowej w końcowej produkcji rolniczej [%],
X_4 – stopa rejestrowanego bezrobocia [%],
X_5 – przeciętna liczba emerytów i rencistów [osoby na 100 ha UR].

Trzy pierwsze cechy ($X_1 – X_3$) są stymulantami, pozostałe dwie (X_4–X_5) destymulantami.

Do normowania cech zastosowano metodę unitaryzacji zerowanej {por. wzór (2a), (2b)}, przekształcenie ilorazowe {por. wzór (2c), (2d)} oraz dodatkowo jako sposób normowania zastosowano zwykłe rangowanie wartości (najogólniej polegające na uszeregowaniu każdej cechy i nadaniu jej odpowiedniej rangi w szeregu). W obliczeniach uwzględniono także różne wartościowanie cech pod względem ich znaczenia dla potencjału rolnictwa (tzw. sty-

Tabela 1 . Dane empiryczne po dokonaniu przekształceń

Województwo	Unitaryzacja						Przekształcenie ilorazowe					
	X1	X2	X3	X4	X5	Z1	X1	X2	X3	X4	X5	Z2
Dolnośląskie	0,30	0,12	0,99	0,36	0,77	0,51	0,90	0,46	1,05	0,74	1,42	0,92
Kujawsko-pomorskie	0,87	0.61	0,46	0,59	0,61	0,63	1,63	1,82	0,99	0,94	1,08	1,29
Lubelskie	0,23	0,55	0,75	0,90	0,22	0,53	0,81	1,64	1,02	1,46	0,69	1,13
Lubuskie	0,02	0,62	0,92	0,48	0,86	0,58	0,54	1,84	1,04	0,83	1,70	1,19
Łódzkie	0,46	0,21	0,25	0,95	0,38	0,45	1,11	0,69	0,96	1,59	0,81	1,03
Małopolskie	0,42	0,41	0,14	0,83	0,00	0,36	1,05	1,26	0,95	1,30	0,57	1,03
Mazowieckie	0,53	1,00	0,17	0,86	0,46	0,60	1,20	2,89	0,95	1,35	0,89	1,46
Opolskie	0,29	0,14	1,00	0,59	0,82	0,57	0,88	0,50	1,05	0,93	1,56	0,99
Podkarpackie	0,00	0,34	0,00	0,67	0,26	0,25	0,52	1,06	0,93	1,03	0,72	0,85
Podlaskie	0,57	0,06	0,57	1,00	0,54	0,55	1,24	9,27	1,00	1,77	0,99	1,05
Pomorskie	0,45	0,24	0,88	0,35	0,83	0,55	1,09	0,78	1,04	0,73	1,61	1,05
Śląskie	0,40	0,19	0,50	0,74	0,37	0,44	1,02	0,63	0,99	1,12	0,81	0,92
Świętokrzyskie	0,15	0,00	0,18	0,92	0,14	0,28	0,72	0,11	0,96	1,52	0,64	0,79
Warmińsko-mazurskie	0,20	0,20	0,76	0,29	0,87	0,46	0,78	0,66	1,02	0,70	1,74	0,98
Wielkopolskie	1,00	0,07	0,38	0,79	0,70	0,59	1,79	0,32	0,98	1,22	1,25	1,11
Zachodniopomorskie	0,15	0,34	0,90	0,00	1,00	0,48	0,72	1,06	1,04	0,56	2,55	1,19
Razem	6,05	5,11	8,56	10,33	8,83	7,84	16,00	16,00	16,00	17,81	19,04	16,97

Źródło: opracowanie własne.

mulanty i destymulanty). Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1, gdzie Z_1 jest średnią artością cech po dokonaniu normalizacji przy użyciu metody unitaryzacji zerowanej, Z_2 – średnia wartość cech po dokonaniu normalizacji przy użyciu przekształceń ilorazowych. Znormalizowane cechy były podstawą do konstrukcji miernika syntetycznego. Mierniki syntetyczne zostały skonstruowane przy wykorzystaniu dwóch wzorców {por. wzór (1)} oraz przy wykorzystaniu radarowych mierników syntetycznych {por. wzory od (3) do (6)}. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 2. W tabeli 2 Z_1 jest średnią wartością cech po dokonaniu normalizacji przy użyciu metody unitaryzacji zerowanej, Z_2 – średnia wartość cech po dokonaniu normalizacji przy użyciu przekształceń ilorazowych Z_3 – suma rang, Z_4 – miernik syntetyczny zbudowany o dwóch wzorcach (U($\mathbf{x}$)), Z_5 – średni radarowy miernik syntetyczny S($\mathbf{x}$)), Z_6 – maksymalny radarowy miernik syntetyczny (M($\mathbf{x}$)), Z_7 – miernik syntetyczny wykorzystujący normowanie ilorazowe (M($\mathbf{x}$)), Z_8 – miernik syntetyczny wykorzystujący normowanie ilorazowe (S($\mathbf{x}$)).

Tabela 2. Wartości mierników symetrycznych

Województwo	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
Dolnośląskie	0,510	0,916	0,53	0,509	0,483	0,536	0,51	0,54
Kujawsko-pomorskie	0,631	1,293	0,65	0,626	0,627	0,631	0,68	0,70
Lubelskie	0,532	1,126	0,57	0,528	0,513	0,522	0,60	0,63
Lubuskie	0,580	1,193	0,63	0,567	0,556	0,598	0,60	0,62
Łódzkie	0,449	1,033	0,58	0,455	0,428	0,457	0,58	0,62
Małopolskie	0,360	1,026	0,45	0,379	0,328	0,387	0,56	0,59
Mazowieckie	0,604	1,457	0,64	0,590	0,586	0,625	0,73	0,74
Opolskie	0,566	0,986	0,58	0,555	0,542	0,593	0,54	0,57
Podkarpackie	0,255	0,853	0,30	0,285	0,217	0,285	0,47	0,49
Podlaskie	0,548	1,054	0,61	0,541	0,526	0,550	0,60	0,65
Pomorskie	0,550	1,050	0,60	0,544	0,534	0,568	0,57	0,59
Śląskie	0,439	0,916	0,46	0,443	0,429	0,445	0,52	0,55
Świętokrzyskie	0,280	0,788	0,30	0,320	0,225	0,259	0,46	0,53
Warmińsko-mazurskie	0,464	0,981	0,50	0,469	0,439	0,483	0,53	0,56
Wielkopolskie	0,590	1,112	0,56	0,57	0,566	0,613	0,62	0,66
Zachodniopomorskie	0,479	1,185	0,56	0,480	0,429	0,526	0,59	0,63

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Uporządkowanie województw według kolejności

Województwo	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
Dolnośląskie	9	14	11	9	9	9	14	14
Kujawsko-pomorskie	1	2	1	1	1	1	2	2
Lubelskie	8	5	8	8	8	7	4	5
Lubuskie	4	3	3	4	4	4	5	7
Łódzkie	12	9	6	12	13	12	8	8
Małopolskie	14	10	14	14	14	14	10	10
Mazowieckie	2	1	2	2	2	2	1	1
Opolskie	5	11	6	5	5	5	11	11
Podkarpackie	16	15	15	16	16	15	15	16
Podlaskie	7	7	4	7	7	8	6	4
Pomorskie	6	8	5	6	6	6	9	9
Śląskie	13	13	13	13	11	13	13	13
Świętokrzyskie	15	16	15	15	15	16	16	15
Warmińsko-mazurskie	11	12	12	11	10	11	12	12
Wielkopolskie	3	6	8	3	3	3	3	3
Zachodniopomorskie	10	4	8	10	12	10	7	6

Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone badania wykazały znaczne różnice w uszeregowaniu województw w zależności od zastosowanej metody klasyfikacji obiektów (tab. 3).

Szczególnie widoczne różnice wystąpiły w uszeregowaniu województw, przy wykorzystaniu przekształceń cech metodą unitaryzacji zerowanej a przekształceniami ilorazowymi. Duże podobieństwo wystąpiło pomiędzy metodami radarowymi wyznaczania wskaźnika syntetycznego wykorzystującego unitaryzację zerowaną a metodą dwóch wzorców. Nie należy jednak na podstawie prezentowanego materiału empirycznego wysnuwać daleko idących wniosków. Po pierwsze liczba cech była bardzo mała i cechy te nie odzwierciedlały w pełni zróżnicowania regionalnego. Celem artykułu jest prezentacja różnych metod porządkowania liniowego obiektów, a zróżnicowanie regionalne rolnictwa jest tylko przykładem empirycznym. Generalnie należy stwierdzić, że metoda normowania cech z reguły ma wpływ na porządkowanie liniowe obiektów.

Oprócz uszeregowania województw pod względem wielu cech interesującym jest także podział województw na jednorodne różniące się między sobą grupy. W literaturze proponowanych jest wiele metod, od wykorzystania szeregu rozdzielczego do metod automatycznego grupowania (metody hierarchiczne, aglomeracyjne i gradacyjne). W tej pracy do klasyfikacji obiektów w jednorodne grupy wykorzystano dwie omówione w poprzednim rozdziale metody rozważane przez funkcje m (**x**), S (**x**), M (**x**), jako funkcje użyteczności służące do klasyfikacji (grupowania) analizowanych obiektów oraz podział na 4 grupy wykorzystując odpowiednio jako progi podziału średnią i odchylenie standardowe $(\overline{X}+\sigma;\ \overline{X};\ \overline{X}-\sigma)$ oraz punkty: 0,25, 0,5, 0,75 w przestrzeni wartości znormalizowanej funkcji użyteczności. Wyniki obliczeń przedstawiono dane zawarte w tabelach 4 i 5.

Tabela 4. Podział na grupy województw przy wykorzystaniu średniej i odchylenia standardowego

Województwo	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
Dolnośląskie	2	3	3	2	2	2	3	4
Kujawsko-pomorskie	1	1	1	1	1	1	1	1
Lubelskie	2	2	2	2	2	2	2	2
Lubuskie	2	2	2	2	2	2	2	2
Łódzkie	3	3	2	3	3	3	2	2
Małopolskie	4	3	3	4	4	4	3	3
Mazowieckie	1	1	1	1	1	1	1	1
Opolskie	2	3	2	2	2	2	3	3
Podkarpackie	4	4	4	4	4	4	4	4
Podlaskie	2	3	2	2	2	2	2	2
Pomorskie	2	3	2	2	2	2	3	3
Śląskie	3	3	3	3	3	3	3	3
Świętokrzyskie	4	4	4	4	4	4	4	4
Warmińsko-mazurskie	3	3	3	3	3	3	3	3
Wielkopolskie	2	2	2	2	2	2	2	2
Zachodniopomorskie	3	2	2	3	3	2	2	2

Źródło: opracowanie własne.

Badania wykazały dość duże zróżnicowania w zależności od stosowanej metody grupowania. Pierwsza metoda grupowania zakłada arbitralny podział na cztery grupy, natomiast metoda grupowania oparta na funkcji użyteczności nie zakłada takiego warunku (w szczególnym przypadku wszystkie obiekty mogą trafić do jednej klasy).

Tabela 5. Podział na grupy województw przy wykorzystaniu funkcji użyteczności

Województwo	Z1	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
Dolnośląskie	2	2	2	3	2	2	2
Kujawsko-pomorskie	2	2	2	2	2	2	2
Lubelskie	2	2	2	2	2	2	2
Lubuskie	2	2	2	2	2	2	2
Łódzkie	3	2	3	3	3	2	2
Małopolskie	3	3	3	3	3	2	2
Mazowieckie	2	2	2	2	2	2	2
Opolskie	2	2	2	2	2	2	2
Podkarpackie	3	3	3	4	3	3	3
Podlaskie	2	2	2	2	2	2	2
Pomorskie	2	2	2	2	2	2	2
Śląskie	3	3	3	3	3	2	2
Świętokrzyskie	3	3	3	4	3	3	2
Warmińsko-mazurskie	3	2	3	3	3	2	2
Wielkopolskie	2	2	2	2	2	2	2
Zachodniopomorskie	3	2	3	3	2	2	2

Źródło: opracowanie własne.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Przeprowadzone badania wykazały, że do grupowania i klasyfikacji gospodarstw rolniczych mogą być wykorzystane funkcje użyteczności. Służą one do konstrukcji miernika syntetycznego, który może być miernikiem oceny poziomu badanego zjawiska. Godnym polecenia miernikiem syntetycznym, przy dużym zróżnicowaniu obiektów, może być miernik zbudowany w oparciu o dwa wzorce. Wiele metod klasyfikacji i porządkowania obiektów opartych o przedstawienia graficzne zależy od uporządkowania cech wejściowych. Proponowana metoda radarowa nie posiada tej wady i daje takie same uporządkowanie niezależnie od kolejności ustawienia cech opisujących obiekty.

LITERATURA

Allen R. G. D. 1964: Ekonomia matematyczna. PWN, Warszawa.

Bartosiewicz S. 1976: Propozycja metody tworzenia zmiennych syntetycznych. Prace Naukowe AE we Wrocławiu, nr 84, Wrocław.

Binderman A. 2004: Przestrzenne zróżnicowanie potencjału rolnictwa w Polsce w latach 1989-1998. *Roczniki Nauk Rolniczych*, Seria G, T. 91, z. 1, s. 51-57.

Binderman A. 2005: Klasyfikacja polskich województw według poziomu rozwoju rolnictwa. *Roczniki Nauk Rolniczych*, Seria G, T. 92, z. 1, s. 42-52.

Binderman A. 2006: Klasyfikacja danych na podstawie dwóch wzorców. *Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej*, SGGW, Warszawa, z. 60, s. 25-34.

Binderman A. 2007: Wielowymiarowa analiza regionalnego zróżnicowania rolnictwa w Polsce. Praca doktorska. SGGW, Warszawa.

Binderman A. 2008: Zastosowanie liniowej i nieliniowej funkcji użyteczności do badania poziomu rolnictwa w Polsce. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych. Konferencja IX. Wyd. SGGW, s. 29-38.

Binderman Z., Borkowski B. 2005: Model ekonometryczny opisujący wydatki na konsumpcję gospodarstw chłopskich, od badań podstawowych do zastosowań w nowoczesnej gospodarce. 45-lecie Ekonometrycznej Szkoły Profesora Michała Kolupy, Kolegium Zarządzania i Finansów SGH. Wyd. SGH, Warszawa, s. 51-60,.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. 2008: O pewnej metodzie porządkowania obiektów na przykładzie regionalnego zróżnicowania rolnictwa. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, Konferencja IX. Wyd. SGGW, s. 39-48.

Binderman Z., Szczesny W. 2009: Arrange methods of tradesmen of software with a help of graphic representations Computer algebra systems in teaching and research. Wyd. WSFiZ, Siedlce, s. 117-131.

Binderman Z. 2009: On elasticity operators and their economical applications (w recenzji).

Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. 2003: Ekonometria. Wybrane zagadnienia. PWN, Warszawa.

Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. 2006: O pewnym problemie przekształcania cech. *Acta Agraria et Silvestria*, Seria Agraria, Sekcja Ekonomiczna, Vol. 47, s. 47-89.

Borys T.1978: Propozycja agregatowej miary rozwoju obiektów. *Przegląd Statystyczny*, z. 3.

Cieślak M. 1974: Modele zapotrzebowania na kadry kwalifikowane. PWN, Warszawa.

Gatnar E. 1998: Symboliczne metody klasyfikacji danych. PWN, Warszawa .

Gatnar E., Wywiał J. 1997: Wykorzystanie metod grupowania danych do wspomagania prac nad podziałem administracyjnym kraju. [W:] Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania, seria: Taksonomia, nr 5. AE we Wrocławiu, Wrocław.

Harasim A. 2006: Dobór wskaźników do oceny regionalnego zróżnicowania rolnictwa. Raporty PIB, z. 3, s. 61-69, Puławy.

Hellwig Z. 1968: Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę kwalifikowanych kadr. *Przegląd Statystyczny*, z. 4.

Hellwig Z. 1979: Zastosowanie wielowymiarowej analizy porównawczej do oceny działalności gospodarczej przedsiębiorstw, materiały konferencyjne. Szklarska Poręba, 25.10.1979.

Hellwig Z. 1981: Systemowe ujęcie WAP. [W:] Metody taksonomiczne i ich zastosowania w badaniach ekonomicznych (materiały konferencyjne). Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN, Wrocław 1981.

Hellwig Z. 1981a: Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych. [W:] Welfe W. (red.), Metody i modele ekonomiczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną. PWE, Warszawa 1981.

Hellwig Z. 1990: Taksometria ekonomiczna, jej osiągnięcia, zadania i cele. Taksonomia – teoria i jej zastosowania. AE Kraków.

Kukuła K. 2000: Metoda unitaryzacji zerowanej. PWN, Warszawa.

Malina A. 2004: Wielowymiarowa analiza przestrzennego zróżnicowania struktury gospodarki Polski według województw. AE, Seria Monografie, nr 162, Kraków.

Młodak A.2006: Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej. Warszawa.

Mostowski A., Stark M. 1977: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa.

Nowak E. 1990: Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych. PWE, Warszawa.

Panek E. 2000: Ekonomia matematyczna. AE, Poznań,

Pociecha J., Podolec B., Sokołowski A., Zając K. 1988: Metody taksonomiczne w badaniach społeczno-ekonomicznych. PWN, Warszawa.

Pociecha J. 2008: Rozwój metod taksonomicznych i ich zastosowań w badaniach społeczno-ekonomicznych. 90-lecie GUS [www.stat.gov.pl], s. 1-13.

Strahl D. 1990: Metody programowania rozwoju gospodarczego. PWE, Warszawa.

Zeliaś A. 1997: Teoria prognozy. PWE, Warszawa.

Zeliaś A. 2000: Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym. Kraków.

Binderman Zbigniew, Borkowski Bolesław, Szczesny Wiesław

ON ARRANGE METHODS IN ANALYSIS OF REGIONAL DIFFERENTATION OF AGRICULTURE

Summary

The paper describes new possibilities of applications of the arrange methods in order to analyse Polish agriculture. These methods use utility functions as the preference indicators. The considered functions based and do not based on models, respectively.

Adres do korespondencji:
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki
ul. Nowoursynowska 166
02-787 Warszawa
e-mail: boleslaw_borkowski@sggw.pl